Простые проценты

Простые проценты - это метод расчета дохода кредитора от предоставления денег в долг заемщику.

Сущность простых процентов состоит в том, что они начисляются на одну и ту же величину капитала К в течение всего срока ссуды. Простые проценты дают больший доход при их начислении на срок меньше года.

Основная формула простых процентов:

$$\frac{K}{I} = \frac{100}{pn} \quad \text{или} \quad I = \frac{Kpn}{100}, \text{ где}$$

К - начальный капитал,

I - доход (процентный платеж, процентные деньги или просто проценты), получаемый кредитором от заемщика за пользование денежной ссудой;

p - процентная ставка, показывающая сколько денежных единиц должен заплатить заемщик за пользование 100 ед. капитала за год,

т. е. годовая ставка в процентах. Если ставка измеряется в долях единицы, то она обозначается буквой $i = \frac{p}{100}$;

Надо помнить, что во всех расчетных формулах ставка берется в долях единицы. Например:

1%=0,01;

40%=0,4;

300%=3 и т.д.

n - время в годах.

Если деньги отданы взаймы под проценты, то заемщик возвращает наращенную сумму

$$\mathbf{S = K + I = K + Kni = K(1 + ni)}, \text{ где}$$

$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{100}}$ - процентная ставка в долях единицы,

n - время в долях года.

Доход за n лет **I = Kni,**

(1 + ni) - множитель наращения по простым процентам.

Итак, если по начальному капиталу (сегодняшним деньгам) **K** находится будущая сумма денег **S**, то операция называется **наращением.**

Если же, зная будущие деньги S, находят их сегодняшнюю сумму K

по формуле: $K = \frac{S}{1 + ni}$, то операция называется **математическим дисконтированием**,

$\frac{1}{1 + ni}$ - дисконтный множитель.

Задача1.

Капитал 200 тыс.руб. вложен в банк на 8 месяцев под 12% годовых.
Найти сумму, которая будет получена к концу срока.

К = 200 тыс.руб., n = $\frac{8}{12}$ года, i = 0,12, p = 12% . S = ?

Решение:

I способ.

S = K + I, I = $\frac{Kpm}{1200}$.

I = $\frac{200 \cdot 12 \cdot 8}{1200}$ = 16 тысяч руб.

S = 200 + 16 = 216 тысяч руб.

II способ.

Ставка годовая, срок n в месяцах переведем в доли года: n = 8 месяцев = $\frac{8}{12}$ года.

S = K(1 + ni)=200(1 + $\frac{8}{12}$ .0,12) = 216 тысяч руб.

Задача 2.

Капитал 200 тыс.руб. вложен в банк на 80 дней под 12% годовых.
Найти величину вклада через 80 дней. Расчет сделать точным и банковским методом.

Решение:

K = 200 тысяч руб. $n = \frac{80}{360}$ года или $n = \frac{80}{365}$ года, i = 0,12, S=?

1. Точный метод:

Т.К. ставка годовая, срок **n** переведем в доли года: $n = \frac{80}{365}$ года,

$$S = K(1 + ni) = 200(1 + \frac{80}{365} \cdot 0,12) = 205,26$$ тыс.руб.

1. **Банковский метод**:

Срок $n = \frac{80}{360}$ года,

$$S = K(1 + ni) = 200(1 + \frac{80}{360} \cdot 0,12) = 205,33$$ тыс.руб.

Банковский метод дает большее наращение.

Ставка i и время n в этих формулах соразмеримы.

Это значит, что если ставка годовая, время измеряется в годах; если ставка полугодовая - время в полугодиях и т.д.

Задача 3.

Начальный капитал 30 млн. руб. Найти наращенную сумму через 5 месяцев по

а) ежегодной ставке 30 %;

б) ежемесячной ставке 3 %;

в) квартальной ставке 5 %.

Решение:

S = K(1 + ni), K = 30 млн., n = 5 месяцев.

а) Т. к. 30 % - годовая ставка, время переводим в доли года n = 5 месяцев = $\frac{5}{12}$ года.

$$S = 30(1 + \frac{5}{12} \cdot 0,3) = 33,75$$ млн. руб.

б) **I способ.**

Рассчитаем наращенную стоимость, используя ежемесячную ставку и время в месяцах:

3 % - ежемесячная ставка, $n = 5$ месяцев,

$S = 30(1 + 5 \cdot 0{,}03) = 34{,}5$ млн. руб.

II способ.

Рассчитаем наращенную стоимость, переведя ежемесячную ставку в годовую, и время в месяцах переведем в доли года:

$3\ \% \cdot 12$ месяцев $= 36\ \%$ - годовая ставка, $n = 5$ месяцев $= \frac{5}{12}$ года,

$S = 30(1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}36) = 34{,}5$ млн. руб.

в) **I способ.**

Рассчитаем наращенную стоимость, используя ежеквартальную ставку, и время в месяцах переведем в кварталы, помня о том, что 1 квартал равен 3 месяцам:

5 % - ежеквартальная ставка, $n = 5$ месяцев $= \frac{5}{3}$ квартала,

$S = 30(1 + \frac{5}{3} \cdot 0{,}05) = 32{,}5$ млн. руб.

II способ.

Рассчитаем наращенную стоимость, переведя ежеквартальную ставку в годовую, и время в месяцах - в доли года:

$5\ \% \cdot 4$ квартала $= 20\%$ - годовая ставка, $n = 5$ месяцев $= \frac{5}{12}$ года,

$S = 30(1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}2) = 32{,}5$ млн. руб.

III способ.

Рассчитаем наращенную стоимость, используя ежемесячную ставку и время в месяцах:

$5\ \% : 3 = \frac{5}{3}$ % - ежемесячная ставка, $n = 5$ месяцев,

$S = 30(1 + 5 \cdot \frac{5}{300}) = 32{,}5$ млн. руб.

? **Обратите внимание:**

Ставка годовая, срок измеряется в годах;

Ставка ежемесячная, срок - в месяцах и т. д.

Банковский учет. Учет векселей.

Операция по учету векселей состоит в том, что банк до срока погашения покупает (учитывает) вексель у его держателя.

При работе с векселями начальный капитал К находят, используя учетную ставку **d**.

$$K = S(1 - nd) = S - Snd = S - D;$$

(1 - nd) называется **дисконтным множителем**.

Такое дисконтирование называется **банковским учетом** или **учетом векселей**.

Согласно этому методу, проценты за использование ссуды в виде дисконта **D = Snd** начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока (т.е. не на начальный капитал К, а на наращенную сумму S).

Из формулы банковского учета $K = S(1 - nd)$, *следовательно*, $S = \frac{K}{1 - nd}$.

Это формула **наращения** по простой учетной ставке.

В этих формулах n - срок от момента учета векселя до момента его погашения.

Задача 4. Векселедержатель предъявил для учета вексель на 5 млн.руб. со сроком погашения 28.09.96. Вексель предъявлен 13.09.96.

Какую сумму получит векселедержатель, если:

а) вексель погашается по учетной ставке d = 0,75;

б) вексель погашается по процентной ставке i = 0,75?

Решение:

1) по учетной ставке $K = S(1 - nd) = 5(1 - \frac{15}{360} 0{,}75) = 4{,}844$ млн.руб.

2) по процентной ставке $K = \frac{S}{1 + ni} = \frac{5}{1 + \frac{15}{360} \cdot 0{,}75} = 4{,}848$ млн.руб.

Вексель выгоднее учитывать по процентной ставке, в этом случае

векселедержатель получает большую сумму.

В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, предусматривающее начисление простых процентов на первоначальную сумму долга K, необходимо решить две задачи:

1. определить конечную сумму долга S на момент его погашения;
2. рассчитать сумму K_1, получаемую при учете, путем дисконтирования конечной суммы долга, применяя учетную ставку, действующую в момент учета.

В задачах такого типа при работе с векселями рассматриваются три даты: выдачи векселя, его учета и его погашения.

Срок между датами выдачи и погашения обозначим n, за это время первоначальная сумма K по ставке i вырастет до суммы $S = K(1+ni)$.
Срок между датами учета векселя и его погашением обозначим через n_1.
Найдем сумму. Полученную при учете векселя, дисконтируя сумму S по ставке d: $K_1 = S(1-n_1 d)$.
Оба действия можно объединить в одно:
$K_1 = K(1+ni)(1-n_1 d)$.

Задача 5.

Платежное обязательство уплатить через 100 дней 2 млн. руб. с процентами, начисляемыми по ставке простых процентов i=20% годовых, было учтено за 40 дней до срока погашения по учетной ставке d =15%. Требуется найти сумму, полученную при учете.

Решение:

$$K_1 = 2(1+\frac{100}{365}\cdot 0{,}2)(1-\frac{40}{360}\cdot 0{,}15) = 2{,}074\ млн.руб.$$

Формулы доходности финансовых операций

Если в формулах наращения по процентной и учетной ставке принять срок n = 1 году, то получим, что

$$i = \frac{S-K}{K}, d = \frac{S-K}{S}.$$

Если $n \neq 1$ **году**, $i = \frac{S-K}{Kn}, d = \frac{S-K}{Sn}$.

Эти формулы принято называть формулами доходности или эффективности по простой ставке процентов и учетной ставке соответственно.

Задача 6.

Предприятие получило кредит на 1 год в размере 100 млн. с условием возврата 150 млн.

Найти доходность операции для кредитора в виде процентной и дисконтной (учетной) ставок.

К = 100 млн., S = 150 млн., n = 1 год. I = ?, d = ?

Решение:

$$i = \frac{S-K}{Kn}, \quad i = \frac{150-100}{100 \cdot 1} = 0{,}5 = 50\%;$$

$$d = \frac{S-K}{Sn}, \quad d = \frac{150-100}{150 \cdot 1} = 0{,}33 = 33\%.$$

Дисконтная ставка всегда меньше процентной, ибо она учитывает время более жестко.

Иногда размер дисконта в контрактах фиксируется за весь срок ссуды в виде доли (или процента) от суммы погасительного платежа. Таким образом, уровень процентной ставки задается в неявном виде. Выведем формулы, с помощью которых можно вычислить значения этих ставок.

Пусть S- размер погасительного платежа (сумма ссуды к концу срока), d_n - доля этого платежа, определяющая величину дисконта за весь срок ссуды.

К = S(1 - d_n) - реально выдаваемая ссуда в момент заключения договора.

Тогда

$$i = \frac{S-K}{Kn} = \frac{S-S(1-d_n)}{S(1-d_n)n} = \frac{d_n}{(1-d_n)n};$$

$$d = \frac{S-K}{Sn} = \frac{S-S(1-d_n)}{Sn} = \frac{d_n}{n}.$$

Задача 7.

Кредитор и заемщик договорились, что из суммы кредита, выданного на 200 дней, сразу удерживается дисконт в размере 25% указанной суммы. Требуется определить цену кредита в виде простой годовой учетной ставки d и годовой простой ставки i. Год полагать равным 365 дней.

Решение:

$$d = \frac{0,25}{200/365} = 0,45625, \quad т.е. 45,625\%.$$

$$i = \frac{0,25}{(1-0,25)\cdot 200/365} = 0,60833, \quad т.е. 60,833\%.$$

Простые переменные ставки

В кредитных соглашениях иногда предусматриваются изменяющиеся во времени процентные ставки.

Если $i_1, i_2, \ldots i_k$ - последовательные во времени простые ставки,

а $n_1, n_2, \ldots n_k$ - периоды, в течение которых применяются соответствующие ставки, тогда наращенная сумма определяется следующим образом:

$$S = K(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_k i_k).$$

Задача 8

Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год - ставка 16%, в каждый последующем полугодии ставка повышается на 1%. Определить множитель наращения за 2,5 года.

Дано:

n_1=1 год, i_1 =16%,

n_2=1/2 года, i_2 =(16+1)% = 17%,

n_3=1/2 года, i_3 =(17+1)% = 18%,

n_4=1/2 года, i_4 =(18+1)% = 19%,

Общий срок начисления процентов 1+1/2+1/2+1/2=2,5 года.

Множитель наращения = $1 + 1\cdot 0,16 + 1/2\cdot 0,17 + 1/2\cdot 0,18 + 1/2\cdot 0,19 = 1,43$.

Иначе, за 2б5 года начальный капитал увеличился в 1,43 раза.

Реинвестирование

В практике при реинвестировании средств в краткосрочные депозиты иногда прибегают к неоднократному последовательному повторению наращения по простым процентам в пределах заданного общего срока, т.е. к реинвестированию средств, полученных на каждом этапе наращения. (Напоминает наращение по сложным процентам, но только напоминает!)

В этом случае наращенная сумма для всего срока составит:

$$S = K(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2) \quad (1 + n_k i_k),$$

k - количество реинвестиций.

Если периоды начисления и ставки не изменяются во времени, то формула

реинвестирования примет вид:

$$S = K(1+ni)^k$$

, k - количество реинвестиций.

Задача 9.

Сумму в 100 тысяч рублей положили 1 января на месячный депозит под 20% годовых. Каковой будет наращенная сумма, если операция повторяется 3 раза? Расчет сделать по точным и банковским процентам.

Решение:

По условию задачи депозит в 100 тысяч рублей реинвестируется трижды по простым процентам.

По точным процентам:

$$S = 100\,(1+\frac{31}{365}\cdot 0{,}2)(1+\frac{28}{365}\cdot 0{,}2)(1+\frac{31}{365}\cdot 0{,}2) = 105{,}013\,тыс.руб.$$

(Помните, что в январе 31 день, в феврале - 28 дней, в марте - 31 день!)

По банковским процентам при условии, что в каждом месяце по 30 дней:

$$S = 100\,(1+\frac{30}{360}\cdot 0{,}2)^3 = 105\,?084\,тыс.руб.$$

Сложные проценты

В средне и долгосрочных операциях, если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, то для наращения используются сложные проценты.

Сложные проценты отличаются от простых процентов базой начисления. Если в простых процентах она остается постоянной на весь срок начисления, то в сложных при каждом начислении процентные деньги присоединяются к первоначальной базе. Говорят, идет капитализация процентов.

Формула наращения по сложным процентам, если проценты начисляются один раз в году, имеет вид

$$S = K(1+i)^n$$

,

где i - годовая (номинальная) процентная ставка,

n - число лет начисления,

$(1+i)^n$ - множитель наращения по сложным процентам.

Задача 1.

Сумма, равная 800 тыс. руб., инвестируется на 3 года под 80% годовых. Найти наращенную сумму и сумму процентов за этот срок, используя простые и сложные проценты.

Решение:

1.Сложные проценты:

$$S = K(1+i)^n = 800\,(1+0{,}8)^3 = 800 \cdot 5{,}832 = 4665{,}6 тыс.руб.$$

$$Доход \quad I = 4665{,}6 - 800 = 3865{,}6 тыс.руб.$$

2. Простые проценты:

$$S = K(1+ni) = 800\,(1+3\cdot 0{,}8) = 800 \cdot 3{,}4 = 2720\ тыс.руб.$$

$$Доход \quad I = 2720 - 800 = 1920\ тыс.руб.$$

За 3 года 800 тыс. руб. увеличились в 5,832 раза по сложным процентам и только в 3,4 раза по простым процентам.

Задача 2.

Сумма, равная 800 тыс. руб., инвестируется на 3 месяца под 80% годовых. Найти наращенную сумму и сумму процентов за этот срок, используя простые и сложные проценты.

Решение:

1.Сложные проценты:

$$S = K(1+i)^n = 800\,(1+0{,}8)^{3/12} = 800 \cdot 1{,}158 = 926{,}63 тыс.руб.$$

$$Доход \quad I = 926{,}63 - 800 = 126{,}63 тыс.руб.$$

2. Простые проценты:

$$S = K(1+ni) = 800\,(1+3/12\cdot 0{,}8) = 800 \cdot 1{,}2 = 960\ тыс.руб.$$

$$Доход \quad I = 960 - 800 = 160\ тыс.руб.$$

Итак, сложные проценты работают лучше, если срок n больше 1 года и простые проценты лучше работают (дают большее наращение) внутри года. Если срок начисления процентов 1 год, простые и сложные проценты дают одинаковый результат.

Задача 3. Найти сумму долга в 15 млн. руб. через 8 месяцев, 320 дней, 2 года, 10 лет по сложным годовым ставкам 5% и 8%.

Решение:

$$S = K(1 + i)^n$$

$S = 15(1 + 0{,}05)^{\frac{8}{12}} = 15{,}495;$ $S = 15(1 + 0{,}08)^{\frac{8}{12}} = 15{,}790;$

$S = 15(1 + 0.05)^{\frac{320}{360}} = 15{,}665;$ $S = 15(1 + 0{,}08)^{\frac{320}{360}} = 16{,}062;$

$S = 15(1 + 0{,}05)^{2} = 16{,}538;$ $S = 15(1 + 0{,}08)^{2} = 17{,}496;$

$S = 15(1 + 0{,}05)^{10} = 24{,}433;$ $S = 15(1 + 0{,}08)^{10} = 32{,}384.$

Сумма долга зависит от процентной ставки и числа лет начисления. Сравните суммы по годам и по процентным ставкам. (Сумма долга растет с увеличением и процентной ставки, и числа лет начисления).

Наращение процентов m раз в году. Номинальная ставка

Номинальная ставка - годовая ставка, по которой проценты начисляются m раз в году. Обозначим эту ставку через j.

Если проценты начисляются m раз в году, то наращение процентов происходит по ставке $\frac{j}{m}$, общее число начислений процентов за срок n равно mn.

Формула наращения процентов по номинальной ставке j при m-разовом начислении процентов в году примет вид:

$$S = K\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Если j - номинальная ставка сложных процентов, то
при m = 2 получается полугодовая ставка,
при m = 4 - квартальная,
при m = 12 - ежемесячная,
при m = 365 (360) - ежедневная ставка процентов.

Задача 4.

Очень важная задача!

Обязательная задача при зачете по сложным процентам.

Вложены деньги в банк в сумме 5 млн. руб. на 2 года с полугодовым начислением процентов под 20% годовых.

Составить схему наращения капитала, найти наращенные суммы по

периодам начисления и к концу срока двумя способами:

1. по определению сложных процентов (как процент на процент);
2. по формуле

$$S = K(1 + \frac{j}{m})^{mn}, \text{ срок } n = \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2};\ 2\textit{года},$$

$$\textit{число начислений процентов в году } m = 2.$$

Решение:

Рассчитаем полугодовую ставку $\frac{j}{m} = \frac{20\%}{2 \cdot 100\%} = 0{,}1$; Множитель наращения $1 + \frac{j}{m} = 1{,}1.$

1 способ.

По первому способу сумма, с которой идет наращение, увеличивается с каждым наращением процентов, т.к. по определению сложных процентов база для начисления изменяется за счет присоединения полученных на предыдущем шаге процентов, т.е. $S_i = K_i(1 + \frac{j}{m})$.

$$S_1 = 5 \cdot 1{,}1 = 5{,}5 \textit{млн.руб.};$$

$$S_2 = 5{,}5 \cdot 1{,}1 = 6{,}05 \textit{млн.руб.};$$

$$S_3 = 6{,}05 \cdot 1{,}1 = 6{,}655 \textit{ млн.руб.};$$

$$S_4 = 6{,}655 \cdot 1{,}1 = 7{,}3205 \textit{млн.руб.}$$

2 способ.

По второму способу наращения начальный капитал К=5,0 млн. руб. остается неизменным.

$$S_1 = 5{,}0 \cdot 1{,}1^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 5{,}5 \textit{млн.руб.};$$

$$S_2 = 5{,}0 \cdot 1{,}1^{2 \cdot 1} = 6{,}05\, млн.руб.;$$

$$S_3 = 5{,}0 \cdot 1{,}1^{2 \cdot \frac{3}{2}} = 6{,}655\, млн.руб.;$$

$$S_4 = 5{,}0 \cdot 1{,}1^{2 \cdot 3} = 7{,}3205\, млн.руб.;$$

Естественно, что по обоим способам результаты получились одинаковыми.

Задача 6.

Сумма 10 млн. руб. инвестирована на 2 года по годовой ставке 120%. Найти наращенные за это время суммы и приросты при начислениях:

1) ежегодном (m=1),
2) полугодовом (m=2),
3) ежеквартальном (m=4),
4) ежемесячном (m=12),
5) ежедневном (m=365).

Решение:

1. при ежегодном начислении процентов

$$S = 10\left(1 + \frac{1{,}2}{1}\right)^{1 \cdot 2} = 48{,}4\, млн.руб.$$

$$Прирост I = 48{,}4 - 10 = 38{,}4\, млн.руб.$$

2. при полугодовом начислении процентов

$$S = 10\left(1 + \frac{1{,}2}{2}\right)^{2 \cdot 2} = 65{,}536\, млн.руб.$$

$$Прирост I = 65{,}536 - 10 = 55{,}536\, млн.руб.$$

3. при ежеквартальном начислении процентов

$$S = 10\left(1 + \frac{1{,}2}{4}\right)^{4 \cdot 2} = 81{,}573\, млн.руб.$$

$$Прирост I = 81{,}573 - 10 = 71{,}573\, млн.руб.$$

4. при ежемесячном начислении процентов

$$S = 10(1+\frac{1,2}{12})^{12\cdot 2} = 98,497\ млн.руб.$$

$$ПриростI = 98,497 - 10 = 88,497\ млн.руб.$$

5. при ежедневном начислении процентов

$$S = 10(1+\frac{1,2}{365})^{365\cdot 2} = 109,799\ млн.руб.$$

$$ПриростI = 109,799 - 10 = 99,799\ млн.руб.$$

Итак, чем чаще начисляются проценты, тем больше получается наращенная сумма.

Помните, что это справедливо при прочих равных условиях, а именно, ставка, срок, начальный капитал остаются неизменными, меняется только число начислений процентов в году.

Непрерывные проценты

Если число начислений процентов в году m, то формула наращения принимает вид

$$S = Ke^{\delta n},$$

где - непрерывная ставка, $e^{\delta n}$ - показатель роста.

Задача 7.

На сумму 10 млн руб. начислить проценты по непрерывной ставке =12% за 5 лет.

Решение:

$$S = K \cdot e^{\delta n} = 10 \cdot e^{0,12\cdot 5} = 10 \cdot 1,8221188 = 18,221188\ млн.руб.$$

Дисконтирование по сложным процентам

Найдя из всех формул начальный капитал К, получим уравнение дисконтирования. Полученная при дисконтировании величина К часто называется сегодняшней или современной величиной

$$K = S(1 + \frac{j}{m})^{-mn},$$

$$K = S \cdot e^{-\delta n}.$$

Наращение и дисконтирование по сложной учетной ставке

Начислять проценты можно и по сложной учетной ставке:

$$S = K(1 - d)^{-n} \quad \text{или} \quad S = K(1 - \frac{f}{m})^{-mn},$$

где d и f - годовые сложные учетные ставки,
m- число начислений процентов в году (при m=1, d = f).

Начисление процентов по ставке i называется ***декурсивным***, а по учетной ставке d - ***антисипативным***.

Антисипативное начисление дает большую наращенную сумму и используется в условиях высокой инфляции.

Задача 8.

Вексель на 10 млн. руб. со сроком платежа через 5 лет учтен:

1) по сложной учетной ставке 10% годовых;
2) по простой учетной ставке 10% годовых.

Какое дисконтирование выгоднее векселедержателю?
Решение:

1) по сложной учетной ставке

$$K = S(1-d)^n = 10(1-0{,}1)^5 = 5{,}9049\ млн.руб.$$

2) по простой учетной ставке

$$S = K(1-nd) = 10(1-5\cdot 0{,}1) = 5 млн.руб.$$

Итак, векселедержателю выгоднее дисконтирование по сложной учетной ставке, т.к. в день учета он получит большую сумму.

Задача 9.

Капитал 20 млн. руб. вложен на 4 года под 4% годовых. Найти доход от вложения денег при 1) декурсивном, 2) антисипативном способах расчета.
Какое вложение выгоднее кредитору?
Решение:
Т.к. срок вложения денег больше 1 года, расчет сделаем по сложным процентам.

1) декурсивные проценты

$$S = K(1+i)^n = 20(1+0{,}04)^4 = 23?397\ млн.руб.$$

$$ДоходI = 3{,}397\ млн.руб.$$

2) антисипативные проценты

$$S = \frac{K}{(1-d)^n} = \frac{20}{(1-0{,}04)^4} = 23{,}548\ млн.руб.$$

$$ДоходI = 3{,}548\ млн.руб.$$

Антисипативное начисление процентов выгоднее кредитору, т.к. он получает больший доход.

Эквивалентные ставки

(Очень важное и очень трудное понятие)

Мы рассмотрели все возможные способы начисления процентов.

Однако, по какой бы ставке не начислялись проценты, следует соблюдать принцип **эквивалентности,** в соответствии с которым финансовый результат должен быть **одинаков** при начислении по любой ставке.

Такие ставки называются **эквивалентными** и находятся из равенства взятых попарно множителей наращения или дисконтирования.

Сравним, к примеру, множители наращения сложных процентов при начислении один раз и m раз в году:

$$(1+i)^n = (1+\frac{j}{m})^{mn}.$$

Из равенства найдем $i = (1+\frac{j}{m})^m - 1$.

Ставка i называется эффективной годовой ставкой.

Она дает тот же финансовый результат, что и номинальная ставка j при m-разовом начислении в году.

Это наиболее часто используемая ставка среди всех эквивалентных ставок.

Задача 8.

Рассчитать накопленную сумму процентов за 1 год, если начальный капитал К = 1000 руб., годовая ставка j = 10%, при ежегодном,

полугодовом, квартальном, ежемесячном, ежедневном и непрерывном начислении процентов. Найти базисные и цепные наращения. Для каждого случая рассчитать эффективные ставки и сделать по ним начисления на ту же сумму начального капитала.

Решение:

Начальный капитал К	Частота начисления процентов в году m	Наращенная сумма $S = K(1 + \frac{j}{m})^{mn}$	Базисное наращение (сравнение с ежегодным начислением процентов)	Цепное наращение (сравнение по цепочке с предыдущим начислением)
1000	ежегодное (m = 1)	1100	-	-
1000	полугодовое (m = 2)	1102,50	1102,5-1100 = 2,50	2,50
1000	квартальное (m = 4)	1103,81	1103,81-1100 = 3,81	1103,81-1102,50 = 1,31
1000	ежемесячное (m =12)	1104,71	4,71	1104,71-1103,81 = 0,90
1000	ежедневное (m =365)	1105,16	5,16	0,45
1000	непрерывное (m =)	$1105,17 = 1000e^{0,1}$	5,17	0,01

Рассчитаем эффективные ставки:

$i_э = (1 + \frac{j}{m})^m - 1$ и сделаем начисление на 1000 руб. по эффективной ставке, $S = K(1 + i_э)^n$, n = 1год.

Число начислений m	m=1	m=2	m=4	m=12	m=365	m=
Эффективная ставка i	0,1	0,1025	0,10381	0,10471	0,10516	0,10517
Наращенная сумма	1100	1102,50	1103,81	1047,1	1051,6	1051,7

Сравните наращенные суммы в таблицах. Они одинаковы, что по эффективной ставке, что по номинальной ставке при определенном числе начислений процентов в году.

Этот факт следует из понятия эквивалентных ставок: они обязаны давать одинаковый финансовый результат.

Основные уравнения эквивалентности:

1. **Простой процентной ставки i и простой учетной ставки d:**

$$1+ni=\frac{1}{1-nd};$$

2. **Простых и сложных ставок**:

а) Простой процентной ставки i и сложной учетной ставки f при m-разовом начислении процентов в году:

$$1+ni=(1-\frac{f}{m})^{-mn}$$

б) Простой процентной ставки i и сложной процентной ставки j при m-разовом начислении процентов в году:

$$1+ni=(1+\frac{j}{m})^{mn}$$

3. **Сложной процентной ставки j и сложной учетной ставки f:**

$$(1+\frac{j}{m})^{mn}=(1-\frac{f}{m})^{-mn}$$

4**. Сложных и непрерывных ставок:**

а) Сложной ставки i и непрерывной ставки :

$$(1+i)^{n}=e^{\delta n};$$

б) Сложной процентной ставки j при m-разовом начислении процентов и непрерывной ставки :

$$(1+\frac{j}{m})^{mn}=e^{\delta n};$$

в) Сложной учетной ставки f при m-разовом начислении процентов и непрерывной ставки :

$$(1-\frac{f}{m})^{-mn}=e^{\delta n};$$

Из каждого соотношения при любой известной ставке можно найти эквивалентную ей ставку.

Задача 9.

Найти номинальную процентную ставку, если полугодовая эффективная ставка 6 %.

Решение:

Из уравнения эквивалентности номинальной j и эффективной i ставок найдем j:

$$(1+i)^n = (1+\frac{j}{m})^{mn}, \qquad (1+\frac{j}{m})^m = 1+i, \qquad j = m\cdot(\sqrt[m]{1+i}-1).$$

$$j = 2(\sqrt{1+0.06}-1) = 0{,}05913.$$

? **Заметьте: номинальная годовая ставка всегда чуть меньше эффективной.**

Задача 10.

Найти эквивалентную учетную ставку d для сложной годовой ставки j=0,12 при квартальном начислении процентов(m=4).

Начислить проценты по обеим ставкам на 1000 руб.

Сравнить результаты (Срок n=1 год).

Решение:

Уравнение эквивалентности:

$$(1+\frac{j}{m})^{mn} = (1-\frac{d}{m})^{-mn},$$

$$1+\frac{j}{m} = (1-\frac{d}{m})^{-1},$$

$$1+\frac{0{,}12}{4} = (1-\frac{d}{4})^{-1}, \qquad d = 0{,}1165$$

.

Наращенная сумма по сложной годовой процентной ставке j=12% при квартальном начислении процентов:

$$S_1 = K(1 + \frac{j}{m})^{mn} = 1000(1 + \frac{0,12}{4})^{4 \cdot 1} = 1125,5$$ руб.,

Наращенная сумма по эквивалентной сложной годовой учетной ставке f =11,65% при квартальном начислении процентов:

$$S_2 = K(1 - \frac{d}{m})^{-mn} = 1000(1 - \frac{0,1165}{4})^{-4 \cdot 1} = 1125,5$$ руб.

Естественно, что $S_1 = S_2$, т.к. эквивалентные ставки дают одинаковое наращение.

Задача 12.

Годовая ставка сложных процентов равна 15%. Чему равна эквивалентная сила роста?

Решение:

Воспользуемся уравнением эквивалентности сложной и непрерывной ставок:

$$(1+i)^n = e^{\delta n}.$$

Найдем из этого уравнения непрерывную ставку.

$$\delta = \ln(1+i) = \ln(1+0,15) = 0,13976 = 13,976\,\%.$$

Непрерывная ставка =13,976% и сложная ставка I=15% дают одинаковый финансовый результат. Например, при начальном капитале K=2000 руб., сроке n=4 года, имеем

$$S = 2000 \cdot e^{4 \cdot 0,13976} \approx 3498 \; руб. \quad по \quad непрерывной \quad ставке;$$

$$S = 2000\,(1+0,15)^4 = 3498 \; руб. \quad по \quad сложной \quad ставке.$$

Инфляция

Инфляция **- это обесценивание денег.**

В экономике различают более 20 видов инфляции: инфляция, связанная с эмиссией денег; с большими кредитными расходами; превышения спроса над предложением; с ожиданием роста цен; с изменение цен на сырье; с ростом заработной платы и т.д.

Различают скрытую и открытую **инфляции.**

Скрытой инфляции присущи дефицит товаров, отложенный спрос и постоянные цены.

При открытой инфляции освобождаются цены и растут доходы. Освобождение цен при накопившихся излишках денег ускоряет обращение денег в десятки раз в связи с боязнью населения нового витка повышения

цен, что приводит к гиперинфляции.

Дефляция **- сдерживание обесценивания денег или мероприятия по ограничению денежной массы в обращении. Осуществляется путем увеличения налогов, повышения процентных ставок, ограничения кредитов, снижения роста заработной платы, ограничения продажи ценных государственных бумаг на открытом рынке.**

Характеристики инфляции

1. **Индекс цен** I_p или **индекс покупательной способности** I_{nc}.

$$I_p = \frac{цена\ в\ отчетном\ периоде}{цена\ в\ базисном\ периоде};$$

$$I_{nc} = \frac{1}{I_p}.$$

Индекс цен показывает, во сколько раз приросли цены за соответствующий период. Индекс покупательной способности показывает, во сколько раз уменьшилась покупательная способность за этот же период.

Например, пусть сегодня получены 5000 руб. Известно, что за три предшествующих года цены возросли в 5 раз, т.е. $I_p = 5$, тогда $I_{nc} = \frac{1}{5}$ и реальная стоимость С сегодняшних денег в деньгах трехлетней давности

$$C = 5000 \cdot \frac{1}{5} = 1000 \text{ руб.}$$

2. **Темп инфляции** Н - относительный прирост цен за период. Измеряется в %, находится по формуле: $H = 100(I_p - 1)$.

,

Следовательно, $I_p = 1 + \frac{H}{100}$.

Например, если цены увеличились в 2 раза, то их прирост составил $H = 100(2 - 1) = 100\%$.

И наоборот, если темп прироста цен составил 70%, то цены увеличились в

$$I_p = 1 + \frac{70}{100} = 1{,}7\ раза.$$

3. **Среднегодовой темп роста цен** $i_p = \sqrt[n]{I_p}$,

среднегодовой темп инфляции $h = 100\left(\sqrt[n]{I_p} - 1\right)$.

Если рассматривается индекс цен за несколько периодов, то

$$I_p = (1 + \frac{h_1}{100})(1 + \frac{h_2}{100})\ldots(1 + \frac{h_n}{100}).$$

Если $h_1 = h_2 = \ldots = h_n$, то $I_p = (1 + \frac{h}{100})^n$.

Задача 9.

Темп инфляции h=10% в месяц. Найти рост цен за год и годовой темп инфляции.

Решение:

$$h = 100(\sqrt[n]{I_p} - 1),$$

$$10 = 100(\sqrt[12]{I_p} - 1), I_p = 1{,}1^{12} = 3{,}1384,$$

или на $H = 100(I_p - 1) = 213{,}84\%$.

т.е. цены выросли за год в 3,1384 раза

Задача 10.

Последовательный прирост цен за 3 месяца составил 25%, 20%, 18%. Найти темп инфляции за эти месяцы.

Решение:

$I_p = (1 + 0{,}25)(1 + 0{,}2)(1 + 0{,}18) = 1{,}77$, т. е. цены за 3 месяца выросли в 1,77 раза

или на $H = 100(I_p - 1) = 77\%$.

Инфляцию обычно учитывают в двух случаях:

1. **При расчете наращенной суммы.**

Пусть S - наращенная сумма, C - та же сумма с учетом инфляции. $C = S \cdot I_{пс} = \frac{S}{I_p}$.

Конкретизируем формулу:

Для простых процентов:

Наращенная сумма простых процентов $S = K(1+ni)$. Тогда

$$C = \frac{K(1+ni)}{I_p} = \frac{K(1+ni)}{\frac{H}{100}+1} = \frac{K(1+ni)}{(1+\frac{h}{100})^n}.$$

Для сложных процентов:

Наращенная сумма сложных процентов $S = K(1+i)^n$. Тогда

$$C = \frac{K(1+i)^n}{I_p} = \frac{K(1+i)^n}{\frac{H}{100}+1} = \frac{K(1+i)^n}{(1+\frac{h}{100})^n} = K \cdot \left(\frac{1+i}{1+\frac{h}{100}}\right)^n.$$

Если **i** $\frac{h}{100}$ - реальный рост суммы денег;

если **i** $\frac{h}{100}$ - "эрозия" капитала, нет реального роста денег;

если **i =** $\frac{h}{100}$ - наращение поглощается инфляцией.

Задача 11.

Последовательный прирост цен за 3 месяца составил 25%, 20%, 18%. Найти реальную сумму 1,5 млн. руб., накопленные проценты и инфляционную сумму, реальный доход, реальную доходность,

если наращение идет по ставке i=50%

а) сложных годовых, б) простых процентов.

Решение:

Индекс инфляции найден в задаче 10. Цены за 3 месяца увеличились в 1,77 раз.

Рассчитаем реальную сумму 1,5 млн. руб.

А) по сложным процентам:

Наращенная сумма по сложным процентам

$$S = 1{,}5(1 + 0{,}5)^{\frac{3}{12}} = 1{,}66$$ млн. руб.

$$C = \frac{S}{I_p} = \frac{1{,}66}{1{,}77} = 0{,}938$$

млн. руб. - реальная стоимость 1,66 млн. руб. с учетом инфляции

Накопленные проценты I = S K = 1,66 1,5 = 0,16 млн. руб.;

инфляционная сумма (сумма, которую "съела" инфляция)
K_h = S C = 1,66 0,938 = 0,722 млн. руб.;

реальный доход I_1 = C K = 0,938 1,5 = - 0,562 млн. руб.;

$$i = \frac{I_1}{Kn} = \frac{-0{,}562}{1{,}5 \cdot \frac{3}{12}} \approx -1{,}5 = -150\%$$

реальная доходность

Сложная годовая ставка 50% при трехмесячной инфляции 77% дает отрицательную годовую доходность 150%.
б) По простым процентам:
Наращенная сумма по простым процентам

$$S = 1{,}5(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}5) = 1{,}6875$$ млн. руб.

$$C = \frac{1{,}6875}{1{,}77} = 0{,}953$$

млн. руб. - реальная стоимость 1,6875 млн. руб. с учетом инфляции по простым процентам .

Накопленные проценты $I = S - K = 1{,}6875 - 1{,}5 = 0{,}1875.$ млн. руб.;

инфляционная сумма $K_h = S - C = 1{,}6875 - 0{,}953 = 0{,}7345$ млн. руб.;

реальный доход I_1 = C K = 0,953 1,5 = 0,547 млн. руб.;

$$i = \frac{I_1}{Kn} = \frac{-0{,}547}{1{,}5 \cdot \frac{3}{12}} \approx -1{,}46 \approx -146\%$$

реальная доходность

Простая годовая ставка 50% при трехмесячной инфляции 77% дает годовую отрицательную доходность 146% .

Второй случай учета инфляции:

При измерении эффективности (доходности) финансовой операции

В этом случае применяется индексация процентной ставки, которая сводится к увеличению ставки процентов на величину, так называемой, инфляционной премии.

Назовем ставку с поправкой на инфляцию брутто-ставкой и обозначим ее r (ставка i+ маржа).

Для нахождения брутто-ставки составляется уравнение эквивалентности множителей наращения по брутто-ставке и по ставке i с учетом инфляции.

Рассчитаем брутто-ставки:

1. Для простых процентов:

Уравнение эквивалентности,

$$1 + nr = (1 + ni) \cdot I_p, \quad \textit{следовательно}, \quad \textit{брутто} - \textit{ставка} \quad r = \frac{(1 + ni) \cdot I_p - 1}{n}$$

реальная ставка $$i = \left(\frac{1 + nr}{I_p} - 1 \right) \cdot \frac{1}{n}$$

2. Для сложных процентов:

Уравнение эквивалентности

$$(1 + r)^n = (1 + i)^n \cdot (1 + \frac{h}{100})^n \rightarrow \text{брутто} - \text{ставка } r = i + \frac{h}{100} + \frac{h}{100} \cdot i$$

,

реальная ставка $$i = \frac{1 + r}{1 + \frac{h}{100}} - 1$$.

Задача 12.

Продолжим решать задачу 11. В условиях этой задачи рассчитаем брутто-ставки для годовой простой и сложной ставки 50%.

а) **Брутто-ставка простых процентов**

$$r = \frac{(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}5) \cdot 1{,}77 - 1}{3/12} = 3{,}965.$$

Простая годовая ставка 396,5% годовых компенсирует инфляцию и дает реальный доход 50% годовых.

Проверка: 1) Наращенная сумма денег с учетом инфляции по брутто-ставке:

$$S = \frac{1{,}5 \cdot \left(1 + 3{,}965 \cdot \frac{3}{12}\right)}{1{,}77} = 1{,}6875$$

млн. руб.

2) Наращенная сумма по ставке i без учета инфляции:

$$S = 1{,}5\left(1 + 0{,}5 \cdot \frac{3}{12}\right) = 1{,}6875$$

млн. руб.

б) **Брутто-ставка сложных процентов**

Т.к. ставка i - годовая ставка, то темп инфляции должен быть рассчитан за год.

$$I_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right)^n$$

$$1{,}77 = \left(1 + \frac{h}{100}\right)^{\frac{3}{12}}$$

$$h = 100 \cdot (1{,}77^4 - 1) = 881{,}5\%$$

- на столько процентов увеличились цены за год.

Годовая сложная брутто-ставка

$$r = 0{,}5 + \frac{881{,}5}{100} + \frac{881{,}5}{100} \cdot 0{,}5 = 13{,}7225 = 1372{,}25\%$$

компенсирует инфляцию и дает годовой доход 50% .

Проверка:

1) Наращенная сумма денег с учетом инфляции по брутто-ставке r:

$$S = \frac{1{,}5 \cdot (1 + 13{,}7225)^{\frac{3}{12}}}{1{,}77} = 1{,}66$$

млн .руб.

2) Наращенная сумма по ставке i без учета инфляции:

$$S = 1{,}5(1 + 0{,}5)^{\frac{3}{12}} = 1{,}66$$

млн. руб.

Консолидация и пролонгация финансовых обязательств

В практике нередко возникают случаи, когда необходимо изменить условия финансовых сделок (досрочно погасить задолженность, объединить (консолидировать) несколько платежей в один, продлить платежи и т.д.) В данных ситуациях прибегают к принципу финансовой эквивалентности обязательств, который предполагает неизменность финансовых отношений сторон до и после изменения контракта.

Эквивалентными считаются такие платежи, которые, будучи "приведены" к одному моменту времени, оказываются равными. Приведение осуществляется путем дисконтирования к более ранней дате или, наоборот, наращения суммы платежа, если эта дата относится к будущему.

Две суммы денег S_1 и S_2, выплачиваемые в разные моменты времени, считаются эквивалентными, если их современные (или наращенные) величины, рассчитанные по одной и той же процентной ставке и на один момент времени, одинаковы.

Общий метод решения задач **подобного рода заключается в разработке уравнения эквивалентности, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к некоторому моменту времени, называемому базовым, приравнивается к сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате.**

Наиболее распространенным способом изменения условий контрактов является консолидация (объединение) и пролонгация (продление) финансовых обязательств.

Здесь решаются две задачи:

1) при известных суммах платежей и их сроках, известном сроке объединяемого платежа, находится его сумма;
2) при известных суммах платежей и их сроках, известной сумме консолидированного платежа, находится срок его выплаты.

Решаем первую задачу. Находим сумму консолидированного платежа при известных сроках выплат всех платежей.

Здесь можно рассмотреть 3 случая.

Случай 1.
Консолидированный платеж S_0 расположен между консолидируемыми платежами. Иначе, есть платежи до и после консолидированного платежа. Расположим платежи на временной оси в порядке возрастания их дат.

Найдем величину консолидированного платежа S_0, используя простую процентную ставку i. Платежи S_1, S_2 , Sj производятся раньше консолидированного платежа s_0, поэтому они наращиваются.
Платежи $S_{к-1}$, Sк производятся позднее консолидированного платежа s_0, поэтому они дисконтируются.
Формула для расчета консолидированного платежа будет выглядеть так:

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + (n_0 - n_j) \cdot i) + \sum_k \frac{S_k}{1 + (n_k - n_0) \cdot i}.$$

Случай 2.

Консолидированный платеж S_0 расположен раньше всех консолидируемых платежей.

Формула для расчета консолидированного платежа будет выглядеть так:

$$S_0 = \sum_k \frac{S_k}{1 + (n_k - n_0) \cdot i}.$$

Случай **3.**

Консолидированный платеж S_0 расположен позднее всех консолидируемых платежей.

Формула для расчета консолидированного платежа будет выглядеть так:

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + (n_0 - n_j) \cdot i)$$

.

Задача 4.

Три платежа $S_1 = 1$ млн. руб., $S_2 = 2$ млн. руб., $S_3 = 3$ млн руб. со сроками уплаты соответственно через 100, 120 и 150 дней заменяются одним со сроком уплаты через 180 дней при простой ставке 20%. Найти сумму консолидированного платежа (год принять равным 360 дней).

Решение:

Платежи и даты их выплат изобразим точками на временной оси в порядке возрастания дней выплат:

За базовую дату примем день выплаты консолидированного платежа S_0.

Т.к. срок объединяемых платежей меньше срока платежа S_0, то приведение платежей к моменту выплаты консолидированного платежа S_0 будет выполняться с помощью операции наращения.

$$S_0 = S_1(1 + n_1 i) + S_2(1 + n_2 i) + S_3(1 + n_3 i) = 1(1 + \frac{180 - 100}{360} \cdot 0{,}2) + 2(1 + \frac{180 - 120}{360} \cdot 0{,}2) +$$

$$+ 3\left(1 + \frac{180 - 150}{360} \cdot 0{,}2\right) = 6{,}164 \; млн. руб.$$

Решаем вторую задачу. Находим срок консолидированного платежа при известных суммах выплат всех платежей.

В этом случае все платежи приводятся на одну более раннюю дату операцией дисконтирования. Составляется уравнение эквивалентности, в левой части которого стоит дисконтированная стоимость платежа S_0, а в правой - сумма дисконтированных стоимостей объединяемых платежей P_0.

Решаем задачу, используя ставку i. Запишем уравнение эквивалентности, дисконтируя все платежи, включая S_0 на начальную дату «0».

$$\frac{S_0}{1+n_0 i} = \sum_k \frac{S_k}{1+n_k i}.$$

Обозначим через P_0 сумму дисконтированных стоимостей объединяемых платежей, т.е.

$$P_0 = \sum_k \frac{S_k}{1+n_k i}.$$

$$P_0 = \frac{S_0}{1+n_0 i}; \quad 1+n_0 i = \frac{S_0}{P_0};$$

Тогда

$$n_0 = \left(\frac{S_0}{P_0} - 1\right) \cdot \frac{1}{i}.$$

Очевидно, что в полученной формуле консолидированная стоимость платежей S_0 должна быть больше суммы дисконтированных консолидируемых платежей P_0. Иначе срок платежа n_0 получится отрицательным.

Задача 6.

Фирма, в погашение задолженности банку за предоставленный кредит под 70% годовых, должна произвести 2 платежа в сроки 18.05 (138-й день), 1.09 (244-й день) суммами $S_1 = 2{,}7$ млн. руб. и $S_2 = 3{,}5$ млн. руб. Фирма договорилась объединить оба платежа в один суммой $S_0 = 7{,}0$ млн. руб. с

продлением срока выплаты.

Найти срок выплаты консолидированного платежа.

(В скобках указан порядковый номер даты платежа)

Решение:

Срок выплаты консолидированного платежа найдем по формуле

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{P_0} - 1\right)$$

, где P^0 - современная величина консолидируемых

$$P_0 = \frac{S_1}{1 + n_1 i} + \frac{S_2}{1 + n_2 i} = \frac{2,7}{1 + \frac{138}{360} \cdot 0,7} + \frac{3,5}{1 + \frac{244}{360} \cdot 0,7} = 4,5$$

платежей.

млн. руб.

$$n_0 = \frac{1}{0,7}\left(\frac{7,0}{4,5} - 1\right) = 0,7937$$

года

t = 365 дней 0,7937287 дней.

По календарю это 14 октября (приложение табл.1).

Общая постановка задачи изменения условий выплаты платежей

При решении задачи изменения условий выплаты платежей составляется уравнение консолидации по следующему правилу:

«Старые» долги равны «новым» долгам, но и те, и другие должны быть приведены на одну дату консолидации.

Дата консолидации либо устанавливается во взаимном соглашении, либо выбирается произвольно.

Задача 7.

Две суммы 12 и 8 млн. руб. должны быть выплачены 1.09.00 (244) и 1.01.01 (1). Стороны договорились пересмотреть условия контракта: должник 1.12.00 (335) выплачивает 10 млн. руб., остаток долга гасится 1.04.01 (91). Найти эту сумму при условии, что пересчет осуществляется по ставке простых процентов, равной 12% (год равен 365 дней).

Решение

Возьмем за базовую дату 1.04.01 и составим уравнение эквивалентности, учитывая два условия:

1) все платежи приведены к базовой дате;
2) старые долги равны новым долгам.

Т.к. базовая дата самая поздняя из всех, то платежи S_1, S_2 и S_3 наращиваются.

$$S_1(1 + n_1 i) + S_2(1 + n_2 i) = S_0 + S_3(1 + n_3 i)$$

$$12\left(1 + \frac{365 - 244 + 91}{365} \cdot 0{,}12\right) + 8\left(1 + \frac{91 - 1}{365} \cdot 0{,}12\right) = S_0 + 10\left(1 + \frac{365 - 335 + 91}{365} \cdot 0{,}12\right)$$

$S_0 = 10{,}675$ млн. руб.

Рентные платежи

Современные финансово-банковские операции часто предполагают не отдельные или разовые платежи, а некоторую их последовательность во времени. Например, погашение задолженности в рассрочку, периодическое поступление доходов от инвестиций, выплата пенсий и т.д.

Такие последовательности называются потоком платежей**, а отдельный элемент последовательности - членом потока.**

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называется **финансовой рентой или аннуитетом.**

Характеристики ренты

Рента характеризуется следующими параметрами:

член ренты R - размер отдельного годового платежа;

период ренты - временной интервал между двумя последовательными платежами;

срок ренты n - время от начала первого периода ренты до конца последнего периода;

процентная ставка i;

число p платежей в году;

частота m начисления процентов.

Классификация рент

1. ренты немедленные (начало срока ренты и начало действия контракта

совпадают) и ренты отсроченные;

2. ренты с ежегодным начислением процентов (m=1), начислением процентов m раз в году и непрерывным начислением процентов;
3. ренты с постоянными и переменными членами;
4. ренты конечные и бесконечные. Если срок ренты более 50 лет, рента считается вечной.
5. рента обычная или **постнумерандо,** если платежи производятся в конце периода; рента **пренумерандо**, если платежи производятся в начале периода.

Пример 4-х летней ренты постнумерандо:

Пример 4-х летней ренты пренумерандо:

Обычно анализ потока платежей предполагает расчет или наращенной суммы или современной стоимости.

Наращенная сумма S ренты

Наращенная сумма - сумма всех членов потока платежей с начисленными на них к концу срока процентами.

1. Годовая рента постнумерандо

Ее характеристики: член ренты R, срок ренты n, ставка i, число выплат в году p=1, число начислений процентов в году m=1.

Положим n=4 года и выведем формулу наращенной суммы ренты.

Построим схему наращения членов ренты на временной оси. Т.к. срок ренты больше одного года, естественно использовать сложные проценты.

Например, на член ренты R, внесенный в конце первого года, будут начисляться проценты 3 года. К концу срока ренты эта сумма будет составлять $R(1+i)^3$.

Подобным образом, на член ренты R, внесенный в конце второго года, будут начисляться проценты 2 года. К концу срока ренты эта сумма будет

составлять $R(1+i)^2$. И т. д.

По определению наращенной суммы ренты

$$S = R(1+i)^3 + R(1+i)^2 + R(1+i)^1 + R = R(1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3) =$$

$$= R\frac{(1+i)^3(1+i)-1}{1+i-1} = R\frac{(1+i)^4-1}{i}.$$

Замечание:
Воспользовались формулой возрастающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{a_n q - a_1}{q-1}, \quad \textit{первый член прогрессии } a_1 = 1,$$

$$\textit{знаменатель прогрессии } q = 1+i,$$

$$n-\textit{й член прогрессии } a_n = (1+i)^3.$$

Тогда общая формула наращенной суммы ренты будет иметь вид:

$$S = R\frac{(1+i)^n-1}{i}.$$

$S_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ - коэффициент наращения ренты, будем находить его, пользуясь математическим калькулятором.

Пример 1.
Создается фонд. Средства в фонд поступают в виде годовой постоянной ренты в течении 6 лет в конце года. Размер разового годового платежа 20 тыс. руб. На поступившие взносы начисляются 25% годовых. Найти величину фонда к концу срока.

Решение: Рассматривается годовая рента постнумерандо, член ренты R=20 тыс. руб., срок ренты n=6 лет, ставка i=25%.
Величина фонда к концу срока

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 20 \cdot \frac{(1+0{,}25)^6 - 1}{0{,}25} = 225{,}176\, тыс.руб.$$

2. Годовая рента, постнумерандо, начисление процентов m раз в году, выплаты p один раз в году

(Характеристики ренты R, n, j, m1, p=1)

$$S = R \cdot \frac{(1+\frac{j}{m})^n - 1}{(1+\frac{j}{m})^m - 1}.$$

Наращенная сумма ренты

Пример 2.

В условиях примера 1 найти величину фонда к концу срока, если проценты начисляются ежеквартально, т.е. m=4.

Решение:

$$S = R \cdot \frac{(1+\frac{j}{m})^n - 1}{(1+\frac{j}{m})^m - 1} = 20 \cdot \frac{(1+\frac{0{,}25}{4})^{4 \cdot 6} - 1}{(1+\frac{0{,}25}{4})^4 - 1} = 239{,}33\, тыс.руб.$$

Внимание! Наращенная стоимость возрасла. Следовательно, чем чаще начисляются проценты, тем больше S.

3. **Рента p-срочная постнумерандо, проценты начисляются один раз в году, выплаты p раз в году**

(Характеристики ренты R, n, i, m=1, p1)

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1}.$$

Наращенная сумма ренты

Пример 3.

В условиях примера 1 найти величину фонда к концу срока, если выплаты делаются ежеквартально, т.е. p=4.

Решение:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = \frac{20}{4} \frac{(1+0{,}25)^6 - 1}{(1+0{,}25)^{1/4} - 1} = 246{,}90\, тыс.руб.$$

4. **Рента p-срочная постнумерандо, проценты начисляются m раз в году,**

число выплат в году p равно числу начислений процентов m

(Характеристики ренты R, n, j, m=p1)

Наращенная сумма ренты $$S = R \cdot \frac{(1+\frac{j}{m})^n - 1}{j}.$$

Пример 4.

В условиях примера 1 найти величину фонда к концу срока, если проценты начисляются ежеквартально, т.е. m=4, число выплат в году также равно p=4.

Решение:

$$S = R \cdot \frac{(1+\frac{j}{m})^n - 1}{j} = 20 \cdot \frac{(1+\frac{0,25}{4})^{4 \cdot 6} - 1}{0,25} = 262,76\, тыс.руб.$$

5. **Рента p - срочная, проценты начисляются m раз в году, выплаты p не совпадают с начислением процентов**

(Характеристики ренты R, n, j, $m \neq p \neq 1$)

Наращенная сумма ренты $$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{(1+i)^{m/p} - 1}.$$

Пример 5.

В условиях примера 1 найти величину фонда к концу срока, если выплаты делаются ежемесячно, т.е. m=12, число выплат в году равно p=4.

Решение:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{(1+i)^{m/p} - 1} = \frac{20}{4} \frac{(1+0,25)^{12 \cdot 6} - 1}{(1+0,25)^{12/4} - 1} = 267,43\, тыс.руб.$$

6.Рента годовая постнумерандо, проценты начисляются непрерывно

Характеристики ренты R, n, , p=1.

Наращенная сумма ренты $$S = R \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}.$$

Пример 6.

В условиях примера 1 найти величину фонда к концу срока, если непрерывная ставка = 25%.

$$S = R \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1} = 20 \cdot \frac{e^{0,25 \cdot 6} - 1}{e^{0,25} - 1} = 245,19\, тыс.руб.$$

Решение:

7. Годовая рента пренумерандо, проценты начисляются один раз в году
(Характеристики ренты R, i, n, m=1, p=1)

Положим, что n =4 года и выведем формулу наращенной суммы ренты. Снова применим сумму геометрической прогрессии (см. выше ренту постнумерандо)

$$S = R(1+i)^4 + R(1+i)^3 + R(1+i)^2 + R(1+i) = R(1+i)(1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3) =$$

$$= R(1+i)\frac{(1+i)^3(1+i)-1}{1+i-1} = R(1+i)\frac{(1+i)^4-1}{i}.$$

Наращенная сумма ренты

$$S = R(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}.$$

Наращенная сумма ренты пренумерандо больше наращенной суммы постнумерандо с такими же параметрами в (1+i) раз!

Пример 7.
В условиях примера 1 найти величину фонда к концу срока, если выплаты делаются ежегодно в начале года.
Решение: Рента годовая пренумерандо.

$$S = R(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} = 20\cdot(1+0{,}25)\cdot\frac{(1+0{,}25)^6-1}{0{,}25} = 281{,}47\,тыс.руб.$$

Современная стоимость ренты

Под **современной стоимостью А** потока платежей понимают сумму всех его членов, дисконтированных на начало срока ренты.

1. Годовая рента постнумерандо (Характеристики ренты R. n, i, p=1, m=1).

Схема дисконтирования:

Пусть n=4 года. Найдем современную стоимость ренты.

$$A=\frac{R}{(1+i)}+\frac{R}{(1+i)^2}+\frac{R}{(1+i)^3}+\frac{R}{(1+i)^4}=\frac{R}{(1+i)}\left(1+\frac{1}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}\right)=$$

$$=\frac{R}{(1+i)}\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^3}\cdot\frac{1}{(1+i)}}{1-\frac{1}{(1+i)}}=R\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^4}}{i}.$$

Замечание:

Воспользовались формулой суммы убывающей геометрической прогрессии

$$S=\frac{a_1-a_nq}{1-q},\quad \textit{первый член прогрессии}\ a_1=1,$$

$$\textit{знаменатель прогрессии}\ q=1+i,$$

$$n-\textit{й член прогрессии}\ a_n=(1+i)^{-3}.$$

Современная стоимость ренты сроком n лет

$$A=R\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

$$a_{n_?i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ - коэффициент приведения ренты.

Пример 8.

Рента постнумерандо характеризуется следующими параметрами:

Член ренты R=4 млн. руб., срок ренты n=5 лет, годовая ставка i= 18,5%. Найти сегодняшнюю стоимость ренты.

$$A = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 4 \cdot \frac{1-(1+0{,}185)^{-5}}{0{,}185} = 12{,}368\ млн.руб.$$

Полученная сумма означает, что если сегодня положить 12,368 млн. руб. под годовую ставку18,5% , то в течении 5 лет в конце каждого года можно получать по 4млн. руб.

2. Годовая рента постнумерандо, начисление процентов m раз в году (Характеристики ренты R, n, j, m1, p=1)

Современная стоимость $$A = R\frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{(1+\frac{j}{m})^{m}-1};$$

3. Рента p-срочная постнумерандо, проценты начисляются 1 раз в году (Характеристики ренты R, n, i, m=1, p1)

Современная стоимость $$A = \frac{R}{p}\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1};$$

4. Рента p-срочная постнумерандо, проценты начисляются m раз в году, число выплат p совпадает с числом начисления процентов m (Характеристики ренты R, n, j, mp1)

Современная стоимость $$A = \frac{R}{m}\frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{j/m};$$

5. Рента p-срочная постнумерандо, проценты начисляются m раз в году, периоды выплат p не совпадают с периодами начислений процентов (Характеристики ренты R, n, j, mp1)

Современная стоимость $$A = \frac{R}{p}\,\frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{(1+\frac{j}{m})^{m/p}-1}$$.

6. Вечная рента постнумерандо

В последней формуле современной стоимости ренты увеличим срок ренты n до бесконечности (n). Коэффициент приведения ренты a_{ni} стремится к величине $\frac{1}{(1+\frac{j}{m})^{m/p}-1}$, поэтому современная величина такой ренты, называемой **вечной**, имеет вид

$$A = \frac{R}{p}\cdot\frac{1}{(1+\frac{j}{m})^{m/p}-1}$$.

7. **Годовая рента пренумерандо** (Характеристики ренты R, n, i, m=1, p=1)

Схема дисконтирования

Современная стоимость ренты $$A = R(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$.

Оценка инвестиционных проектов

Основными показателями инвестиций являются: чистый приведенный

эффект (доход), индекс рентабельности, внутренняя норма доходности, срок окупаемости инвестиций.

Метод расчета чистого приведенного эффекта NPV
(net present value)

Этот метод основан на сопоставлении величины исходной инвестиции IC с общей суммой дисконтированных чистых денежных поступлений PV, генерируемых ею в течение прогнозируемого срока n. Т.к. приток денежных средств распределен во времени, он дисконтируется по ставке **r**, установленной инвестором.

Пусть делается прогноз, что инвестиция **IC** будет генерировать в течение **n** лет годовые доходы $\mathbf{P_1, P_2, \ldots, P_n}$.

Тогда сумма дисконтированных доходов

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{Pk}{(1+r)^t} \qquad (1)$$

Чистый приведенный доход

$$NPV = PV - IC = \sum_{k=1}^{n} \frac{Pt}{(1+r)^k} - IC \qquad (2)$$

<u>Основное достоинство этого метода:</u>
<u>Показатели NPV различных проектов можно суммировать</u>

Типовые примеры на расчет показателя чистого приведенного дохода

Пример1:

Фирма собирается вложить средства в приобретение нового оборудования, стоимость которого вместе с доставкой и установкой составит 100 000 ден. ед. Ожидается, что внедрение оборудования обеспечит получение на протяжении 6 лет чистых доходов в 25 000, 30 000, 35 000, 40 000, 45 000, и 50 000 ден. ед. соответственно. Принятая норма дисконта равна 10%. Определить экономическую эффективность проекта.

Решение:

Изобразим ежегодные поступления от инвестиций на временной оси.

$$NPV = \frac{25000}{1+0,1} + \frac{30000}{(1+0,1)^2} \frac{35000}{(1+0,1)^3} + \frac{40000}{(1+0,1)^4} + \frac{45000}{(1+0,1)^5} + \frac{50000}{(1+0,1)^6} - 100000 = 57302,37 > 0$$

проект следует принять.

Как видим, при условии правильной оценки денежного потока **проект обеспечивает возмещение произведенных затрат** (примерно к концу четвертого года) **и получение 10% чистой прибыли**, **а также дополнительной** (сверх установленной нормы) **прибыли, равной величине NPV (57 302,37).**

Другое объяснение полученного показателя NPV могло бы состоять в следующем: **если проект финансировался за счет долгосрочной ссуды из 100 000 ден. ед., взятой на 6 лет под 10% годовых, ее величина и проценты могли бы быть полностью выплачены из поступлений наличности проекта**. Кроме того, **после расчетов с кредиторами остаток полученной от проекта наличности составил бы сумму в 57 302,37 ден. ед.**

Пример 2:

Проект, требующий инвестиций в размере IC=160 000 $, предполагает получение годового дохода в размере $P_к$=30 000$ на промежуток **n** = 15 лет. Оценить целесообразность такой инвестиции, если коэффициент дисконтирования r =15%.

Решение:

Обратите внимание на тот факт, что все ежегодные поступления одинаковы, поэтому можно принять при расчете формулу современной стоимости ренты.

Рассчитаем чистый приведенный доход проекта:

$$NPV = \sum_{k=1}^{15} \frac{30000}{(1+0,15)^{15}} - 160000 = 30000 \frac{1-(1+0,15)^{-15}}{0,15} - 160000 = 15421,1 > 0$$

,

проект следует принять.

Метод расчета индекса рентабельности инвестиций PI

(profitability index)

Индекс рентабельности PI рассчитывается по формуле:

$$PI = \sum_k \frac{Pk}{(1+r)^k} : IC = \frac{PV}{IC}$$

Этот относительный показатель, удобен при выборе одного проекта из ряда альтернативных, имеющих одинаковый NPV, либо при комплектовании портфеля инвестиций с максимальным суммарным NPV.

Методы расчета нормы рентабельности инвестиции IRR (Internal rate of return)

Под нормой рентабельности (внутренней нормой доходности) IRR инвестиции понимают значение коэффициента дисконтирования, при котором чистый приведенный эффект проекта равен нулю,
т.е. IRR = r, при котором NPV = f (r) = 0.

IRR показывает максимально допустимый относительный уровень доходов, которые могут быть ассоциированы с данным проектом.

Например, если проект полностью финансируется за счет ссуды коммерческого банка, то IRR показывает верхнюю границу допустимого уровня банковской процентной ставки, превышение которой делает проект убыточным.

На практике IRR сравнивается с r - заданной нормой дисконта, которая отражает минимум возврата на вложенный в его деятельность капитал.

Пример 4:Найдите IRR денежного потока: -100, +230, -132.
Решение:
Схему вложения денег изобразим на временной оси.

-100 230 -132

Воспользовавшись определением IRR: **NPV (IRR) = NPV(r) = 0,** составим уравнение для нахождения этого показателя.

$$-100 + \frac{230}{(1+r)} - \frac{132}{(1+r)^2} = 0,$$

$-100(1+r)^2 + 230(1+r) - 132 = 0,$

$50r^2 - 15r + 2 = 0,$

$r_1 = 0{,}2 = 20\%$; $r_2 = 0{,}1 = 10\%$.

Для данного проекта существуют две ставки внутренней доходности.

Эти ставки показывают, что все финансовые операции по ставке выше IRR = 20% и по ставке ниже IRR = 10% убыточны для рассматриваемого проекта.

Метод определения срока окупаемости инвестиций PP

Если доход распределен по годам равномерно, то срок окупаемости PP рассчитывается делением единовременных затрат на величину годового дохода, обусловленного ими. При получении дробного числа оно округляется в сторону увеличения до ближайшего целого. Если прибыль распределена неравномерно, то срок окупаемости рассчитывается прямым подсчетом числа лет, в течение которых инвестиция требует погашения кумулятивным (суммарным) доходом K, т.е.:

PP = n, при котором $\sum_{k=1}^{n} Pk > IC$ **.**

Пример 5:

Задана динамика денежных потоков по годам для проектов А, Б, В и их комбинации:

Год	Проекты				
	А	Б	В	А и Б	Б и В
0-й	-10	-10	-10	-20	-20
1-й	0	10	0	0	10
2-й	20	0	0	20	0
3-й	5	15	15	20	30

Периоды окупаемости проектов	2	1	3	2	3

Основными недостатками срока окупаемости являются:

1. Метод не учитывает влияние доходов последних периодов.

Например: проекты А и В имеют одинаковые затраты - 10 млн. руб.;
годовые доходы:
по проекту А по 4,2 млн. руб. в течение трех лет;
по проекту В по 3,8 млн. руб. в течение десяти лет.
Оба проекта в течение трех лет окупают вложения, но проект В более выгоден.

2. Метод основан на недисконтированных потоках, если потоки дисконтировать, срок окупаемости проектов увеличивается.

3.Показатель не обладает свойством аддитивности, т.е. сроки по разным проектам нельзя суммировать.

Планирование погашения долгосрочной задолженности

В это модуле речь пойдет о разработке плана погашения займа, который состоит в составлении графика периодических платежей должника.

Расходы должника обычно называются срочными уплатами или расходами по займу.

Методы определения размера срочных уплат зависят от условий погашения долга, которые предусматривают:

1. срок займа n;
2. уровень и вид процентной ставки g (простая; сложная, проценты выплачиваются 1 раз в году, m раз в году);
3. методы уплаты процентов (сразу на всю сумму, и дальнейшее распределение одинаковыми суммами по периодам или проценты начисляются на непогашенный остаток долга);
4. способы погашения основной суммы долга (погашение основного долга равными суммами или погашение всей задолженности срочными уплатами).

Введем обозначения:

D сумма задолжника (основная сумма без процентов);
Y срочная уплата;
I проценты по займу;
R расходы по погашению основного долга;
g ставка процентов по займу;
n общий срок займа;

i - проценты по депозиту.

Планирование погасительного фонда

Если по условиям займа должник обязуется вернуть сумму долга в конце срока в виде разового платежа, то для накопления таковой суммы обычно создается погасительный фонд.

Погасительный фонд создается из последовательных взносов должника, на которые начисляются проценты. Очевидно, что сумма взносов в фонд вместе с начисленными процентами, накопленная к концу срока долга, должна быть равна его сумме.

Рассмотрим случай формирования фонда, когда взносы регулярны и одинаковы по величине и вносятся в конце года, т.е. речь идет о годовой ренте постнумерандо.

Накопленная к концу срока фонда сумма долга D с процентами есть наращенная сумма ренты S, равная

$$S = D = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Обозначим множитель наращения ренты через $S_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, тогда член ренты $R = \frac{D}{S_{n,i}}$ и в фонд систематически вносится сумма

$$Y = Dg + \frac{D}{S_{n,i}}.$$

Величина процентного платежа I_t, исчисленного по сложным процентам, вычисляют по формуле:

$$I_t = D \cdot (1+g)^{t-1} \cdot g, \quad где \quad t = 1,2....n.$$

Если условия контракта предусматривают присоединение процентов к сумме основного долга по ставке g, то срочная уплата $Y = \frac{D(1+g)^n}{S_{n,i}}$.

Для расчета накопленных за t лет сумм погасительного фонда используется формула наращенных сумм постоянных рент:

$$S_{t+1} = S_t \cdot (1+i) + R.$$

Пример 1.

Долг суммой 100 тыс. руб. выдан на 5 лет под ставку g= 20%. Для его погашения создается фонд. На инвестируемые средства начисляются проценты по ставке i = 22%. Необходимо найти размеры срочных уплат. Взносы производятся в конце каждого года равными суммами.

Решение:

Множитель наращения $S_{n,i} = \frac{(1+0,22)^5 - 1}{0,22} = 7,7396$,

Если проценты присоединяются к сумме долга, то срочная уплата

$$Y = \frac{100\,(1+0,2)^5}{7.7396} = 32.1506$$

тыс. руб.

Если проценты не присоединяются к сумме долга, то ежегодные взносы в банк

$$R = \frac{100}{7.7396} = 12.9206\ тыс.руб.$$

Погашение долга в рассрочку

Метод погашения долга в рассрочку частями называется амортизацией долга. Рассмотрим 2 способа погашения долга в рассрочку.

Погашение основного долга равными суммами

Пусть долг D погашается в течение n лет,

$$\frac{D}{n} - сумма,\ ежегодно\ идущая\ на\ погашение\ долга.$$

Размер долга уменьшается, и остатки долга соответственно равны:

$$D\ ;\quad D - \frac{D}{n};\quad D - \frac{2D}{n};\quad D - \frac{3D}{n};\ldots$$

Т.к. проценты начисляются на непогашенный остаток долга, то они также уменьшаются.

Пусть проценты выплачиваются один раз в году по ставке g.

Процентные платежи соответственно равны:

$$D;\ \left(D - \frac{D}{n}\right)g;\ \left(D - \frac{2D}{n}\right)g;\ldots$$

Сумма выплаченных процентов:

$$J = D\,g\left(1+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right)=D\,g\,\frac{1+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{2}\,n=D\,g\,\frac{n+1}{2}$$

Общая сумма погашения кредита:

$$S = D + J = D\left(1 + g\,\frac{n+1}{2}\right).$$

Если взносы в погашение кредита будут осуществляться P раз в году, то общая сумма выплаченных процентов

$$J = \frac{D}{P}\,g\,\frac{n\,P+1}{2}.$$

Пример 2.

Долг 1000 тыс. руб. необходимо погасить последовательными равными суммами за 5 лет платежами постнумерандо. За заем выплачиваются проценты по годовой ставке 10%. Составить план погашения кредита.

Решение:

Итак, долг D = 1 000 тыс. руб., ежегодная выплата долга $\frac{D}{5}$ = 200 тыс. руб.

Выплаченные проценты за 1-й год J_1 = 1 000 0,1 = 100 тыс. руб.;

Выплаченные проценты за 2-й год J_2 = (1 000 - 200) 0,1 = 80 тыс. руб. и т.д.

Расчеты по погашению долга приведены в таблице 1.

Таблица 1

Год	Остаток долга на начало года	Расходы по займу Y	Погашение основного долга R	Проценты I
1	1 000	300	200	100
2	800	280	200	80
3	600	260	200	60
4	400	240	200	40
5	200	220	200	20
Итого		1300	1000	300

Расход по займу равен сумме расходов по погашению основного долга и расходов по выплаченным процентам, т.е. Y = R + I.
Основной недостаток такого расчета погашения долга - большие платежи в начале выплат.

Погашение долга равными срочными выплатами

По этому методу расходы должника по обслуживанию долга постоянны на протяжение всего срока его погашения.

Из общей суммы расходов должника часть выделяется на уплату процентов, остаток идет на погашение основного долга. Периодическая выплата постоянной суммы Y = R равнозначна ренте с заданными параметрами. Ее современная стоимость A = сумме долга D, т.е.

$$A = D = R\frac{1-(1+g)^{-n}}{g}.$$

Обозначим через $a_{n,g} = \frac{1-(1+g)^{n}}{g}$ - коэффициент приведения годовой ренты со ставкой процентов g и сроком n.

Тогда расход по займу $R = Y = \frac{D}{a_{n,g}}$, а сумма первого взноса по погашению основного долга $d_1 = Y - Dg$.

Пример 3.

Долг 1 000 тыс. руб. погашается в течение 5 лет платежами постнумерандо по ставке g = 10%. Составить план погашения кредита равными срочными выплатами с начислением процентов на непогашенный остаток.

Решение:

Рассчитаем расход по займу R = Y.

$$Y = \frac{D}{a_{n,\,g}} = \frac{1\ 000}{\frac{1-(1+g)^{-n}}{g}} = \frac{1\ 000}{\frac{1-1{,}1^{-5}}{0{,}1}} = \frac{1\ 000}{3{,}79} = 263{,}787 \quad тыс.\ руб.$$

Первая выплата основного долга d_1 = 263,787 - 1 000 0,1 = 163,787 тыс. руб.;
остаток долга D_1 = 1 000 - 163,787 = 836,203 тыс. руб.;
Вторая выплата основного долга d_2 = 263,783 - 836,2030,1 = 180, 177 тыс. руб.
и т. д.

Расчеты по погашению долга приведены в таблице 2.

Таблица 2

Год	Остаток долга на начало года	Расходы по займу Y	Проценты I	Погашение основного долга R
1	1 000	263,787	100,00	163,787
2	836,203	263,787	83,620	180,177
3	656,026	263,787	65,603	198,195
4	457,831	263,787	45,783	218,014
5	239,816	263,787	23,928	239,816
Итого		1318,935	318,935	1000

При таком погашении долга процентные платежи уменьшаются во времени, а сумма погашения основного долга увеличивается, расходы по займу остаются постоянными на весь срок, однако в этом случае должник немного переплачивает.

Погашение потребительского кредита

В потребительском кредите проценты,

как правило, начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу уже в момент открытия кредита, т.е разовым начислением процентов.

Величина разового погасительного платежа

$$Y = \frac{D(1+ng)}{np}$$

, где

n - срок кредита в годах,

p - число платежей в году.

Для решения проблемы определения остатка задолженности на любой момент времени следует разбить величину Y на проценты и сумму, идущую на погашение основного долга.

Рассмотрим возможность такового разбиения двумя способами

Величину разового платежа Y представим в виде суммы

$$Y = \frac{D}{pn} + \frac{Dg}{p} = R + I$$

, где

D - цена товара (сумма основного долга без процентов);

R - размер погашения основного долга;

I - процентный платеж.

Замечание:

В случае срока кредита больше года применяются сложные проценты. Тогда процентный платеж I = D((1+g)n-1).

Сумма порядковых номеров месяцев в году равна 78, отсюда и название правила.

Допустим, что срок кредита равен 1 год. Тогда согласно правилу 78 доля процентов в сумме расходов в первом месяце равна 12/78, во втором она составит 11/78 и т.д. Последняя уплата процентов равна 1/78.

Таким образом, доля процентов убывает, сумма погашения основного долга увеличивается.

Для годового срока:

$$I = \frac{t}{78} Dg;$$

$$R = Y - I = \frac{D(1+g)}{12} - \frac{t}{78} Dg.$$

Пример:

Потребительский кредит размером 240 тыс. руб., предоставленный на 1 год по ставке 20% годовых погасить по правилу 78.

Решение:

Общая сумма задолженности S = 240(1+0.2) = 288 тыс. руб.

Общая сумма выплаченных процентов I = 48 тыс. руб.
Сумма расходов по обслуживанию долга (ежемесячная выплата)
Y = 288/12 = 24 тыс. руб.
Находим процентные платежи по месяцам.
Для первого месяца:

$$I_1 = \frac{12}{78} \cdot 48 = 7.385; \qquad R_1 = 24 - 7.385 = 16.615$$

тыс. руб.

Для второго месяца:

$$I_2 = \frac{11}{78} \cdot 48 = 6.769 \qquad I_2 = \frac{11}{78} \cdot 48 = 6.769$$

тыс. руб. и т.д.
Для двенадцатого месяца:

$$I_{12} = \frac{1}{78} \cdot 48 = 0.615; \qquad R_{12} = 24 - 0.615 = 23.385$$

тыс. руб.

Обобщим правило 78 для кредита со сроком N месяцев.

Последовательные номера месяцев в обратном порядке представляют собой числа:
t = N, N-1,..., 1.
Сумма этих чисел находится по формуле

суммы арифметической прогрессии:

$$\sum_{1}^{N} t = \frac{(1+N)N}{2}.$$

Ежемесячные выплаты процентов

$$I = \frac{t}{\sum t} Dgn;$$

Сумма списания основного долга

$$R = Y - \frac{t}{\sum t} Dgn;$$

В каждом месяце выплаты процентов сокращаются на величину

$$\frac{Dg\,n}{\sum t}$$

, на такую же величину увеличивается сумма списания основного долга.

Важно отметить, что в потребительском кредите при разовом начислении процентов должник фактически выплачивает проценты и за описанные суммы долга, т.е. кредит обошелся бы дешевле, если бы проценты начислялись на остатки долга.

Потребительский кредит в сумме 10 млн. руб. выдан на три года при разовом начислении процентов по ставке 10% годовых. Погашение задолженности помесячное. Составить амортизационные планы

погашения кредита

а) по правилу 78;

б) по методу равномерного распределения выплат процентов.

Решение:

А) по правилу 78:

Общая сумма долга

$S = 10\ 000(1 + 3 \times 0{,}1) = 13\ 000$ ***руб.***

Сумма расходов по обслуживанию долга

$$Y = \frac{13\ 000}{12 \times 3} = 361{,}111 \quad тыс.\ руб.$$

Сумма последовательных номеров месяцев

$$\sum_{1}^{36} t = \frac{(1+36)36}{2} = 666, \qquad t = \overset{1}{36}, \overset{2}{35}, \quad \overset{30}{7}, \overset{31}{6}, \overset{32}{5}, \overset{33}{4}, \overset{34}{3}, \overset{35}{2}, \overset{36}{1}$$

Рассчитаем процентные платежи I и суммы погашения основного долга R:

Для 1-го месяца

$$I = \frac{36}{666} \times 3\ 000 = 162{,}162 \quad тыс.\ руб. \quad \mathrm{R} = 361{,}111 - 162{,}162 = 198{,}949\ тыс.\ руб.$$

;

Для 2-го месяца

$$I = \frac{35}{666} \times 3\ 000 = 157{,}658 \quad тыс.\ руб. \quad R = 361{,}111 - 157{,}688 = 203{,}453\ тыс.\ руб.$$

;

Для 30-го месяца

$$I = \frac{7}{666} \times 3\ 000 = 31{,}532 \quad тыс.\ руб. \quad R = 329{,}579 \quad тыс.\ руб.$$

;

Для 36-го месяца

$$I = \frac{1}{666} \times 3\ 000 = 4{,}505 \quad тыс.\ руб. \quad R = 356{,}606 \quad тыс.\ руб.$$

Общая сумма процентных платежей

$$\sum I = 3000\, руб.$$

Общая сумма выплат основного долга

$$\sum R = 10000\, руб.$$

б) по методу равномерного распределения выплат процентов:

Величину разового платежа Y представим в виде суммы

$$Y = \frac{D}{pn} + \frac{Dg}{p} = R + I$$

, где

Ежемесячная выплата основного долга

$$R = \frac{D}{pn} = \frac{10000}{12 \times 3} = 277.778 тыс.руб.$$

Ежемесячная выплата процентного платежа

$$I = \frac{Dg}{p} = \frac{10000 \times 0.1}{12} = 83.333 тыс.руб.$$